Mots mathématiques

France Gheeraert

18 novembre 2025

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.
- Une *lettre* est un élément de l'alphabet.

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.
- Une *lettre* est un élément de l'alphabet.
- Un *alphabet* est n'importe quel ensemble fini.

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.
- Une *lettre* est un élément de l'alphabet.
- Un *alphabet* est n'importe quel ensemble fini.

Exemples :

- sur l'alphabet $\{\star, \$\}$, on a les mots $\star\star\$\star$ et \$ par exemple

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.
- Une *lettre* est un élément de l'alphabet.
- Un *alphabet* est n'importe quel ensemble fini.

Exemples :

- sur l'alphabet $\{\star, \$\}$, on a les mots $\star\star\$\star$ et $\$$ par exemple
- sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$, on a les mots 002 et $0101010101\cdots$ par exemple

Les mots dans les maths

Définition

- Un *mot* est composé de lettres les unes à côté des autres.
- Une *lettre* est un élément de l'alphabet.
- Un *alphabet* est n'importe quel ensemble fini.

Exemples :

- sur l'alphabet $\{\star, \$\}$, on a les mots $\star\star\$\star$ et $\$$ par exemple
- sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$, on a les mots 002 et $0101010101\cdots$ par exemple

On peut avoir des mots finis ou infinis.

Les mots dans les autres domaines

Les mots sont utiles :

- en mathématiques, pour relier différents sous-domaines ...

Les mots dans les autres domaines

Les mots sont utiles :

- en mathématiques, pour relier différents sous-domaines ...
- en informatique, pour manipuler des nombres, des images, ...

Les mots dans les autres domaines

Les mots sont utiles :

- en mathématiques, pour relier différents sous-domaines ...
- en informatique, pour manipuler des nombres, des images, ...
- en physique, pour étudier un système qui évolue

Les mots dans les autres domaines

Les mots sont utiles :

- en mathématiques, pour relier différents sous-domaines ...
- en informatique, pour manipuler des nombres, des images, ...
- en physique, pour étudier un système qui évolue
- en chimie, pour fabriquer des quasi-cristaux
- ...

Définissons (un mot particulier)

$1, 0$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, . . .

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1, 2$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1, 2, 3$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1, 2, 3, 5$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Définissons (un mot particulier)

1, 0, 01, 010, 01001, 01001010, 0100101001001, ...

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Les longueurs des mots finis sont :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

f est appelé mot de Fibonacci

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 10\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans $\mathbf{f}$.

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 \cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 10\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Définition

La *complexité* d'un mot infini x est la fonction $p_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $p_x(n)$ est le nombre de mots de longueur n qui apparaissent dans x.

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100 \cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans $\mathbf{f}$.

- longueur 1 : 0, 1 $\rightarrow$ 2 mots
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11 $\rightarrow$ 3 mots
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 $\rightarrow$ 4 mots

Définition

La *complexité* d'un mot infini x est la fonction $p_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ où $p_x(n)$ est le nombre de mots de longueur n qui apparaissent dans x.

Comptons (les mots)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$$

Regardons les mots finis apparaissant dans **f**.

- longueur 1 : 0, 1 $\to$ 2 mots
- longueur 2 : 00, 01, 10, 11 $\to$ 3 mots
- longueur 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 $\to$ 4 mots

Définition

La *complexité* d'un mot infini x est la fonction $p_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $p_x(n)$ est le nombre de mots de longueur n qui apparaissent dans x.

La complexité est $p_{\mathbf{f}}(n) = n + 1$ pour tout n.

Enonçons (un théorème)

Théorème (Morse & Hedlund, 1938)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *le mot infini x est périodique*
- *il existe n tel que $p_x(n) \leq n$.*

Enonçons (un théorème)

Théorème (Morse & Hedlund, 1938)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *le mot infini x est périodique*
- *il existe n tel que $p_x(n) \leq n$.*

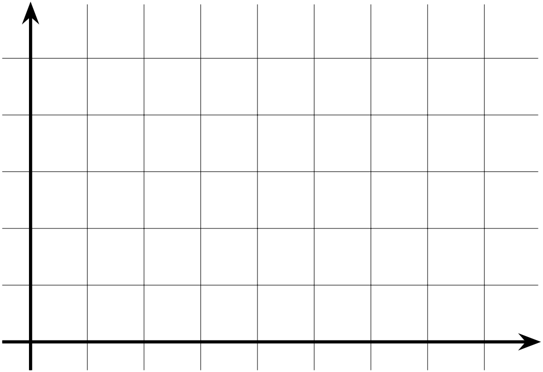
Définition

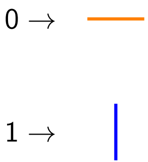
Un mot infini x est *sturmien* si $p_x(n) = n + 1$ pour tout n.

Ce sont les mots intéressants les plus simples.

Visualisons (notre mot)

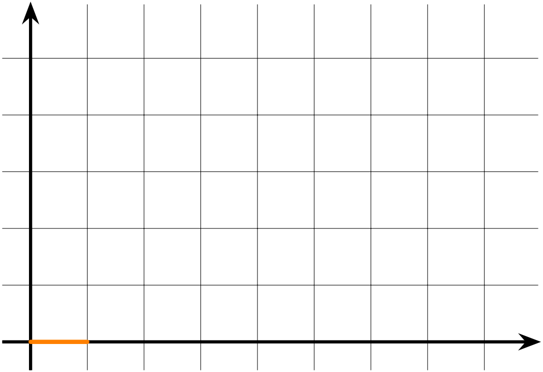
$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$





Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 \cdots$$

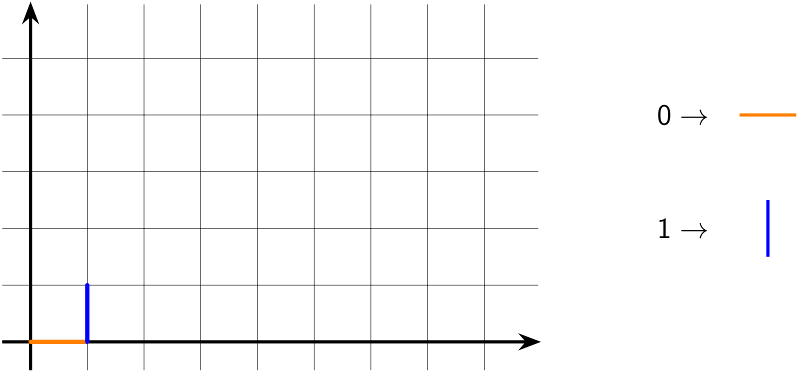


$0 \to$

$1 \to$

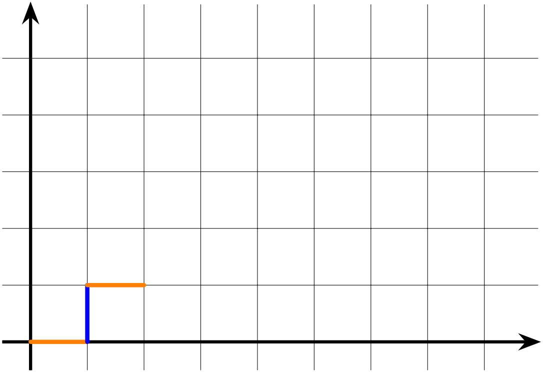
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 01001010010010100101 0\cdots$$



Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 10\cdots$$

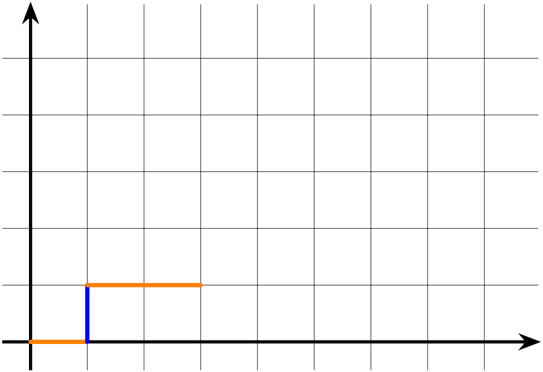


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 \cdots$$

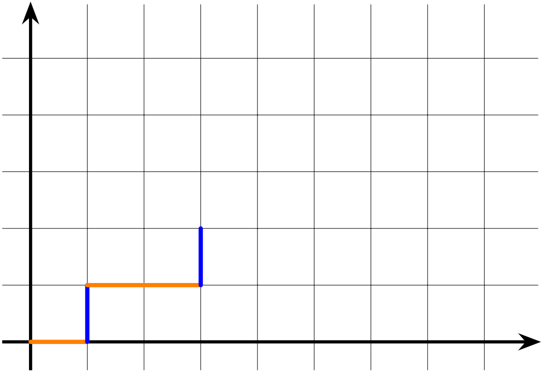


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 10\cdots$$

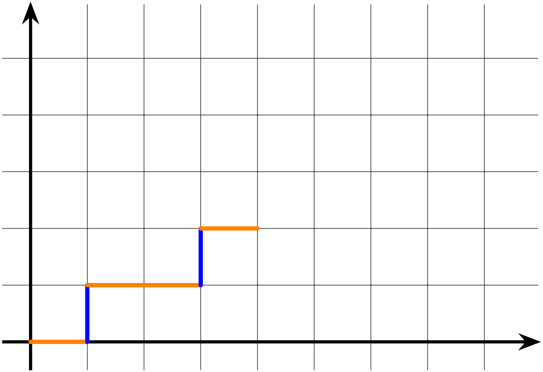


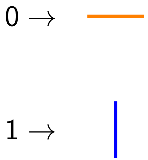
$0 \to$

$1 \to$

Visualisons (notre mot)

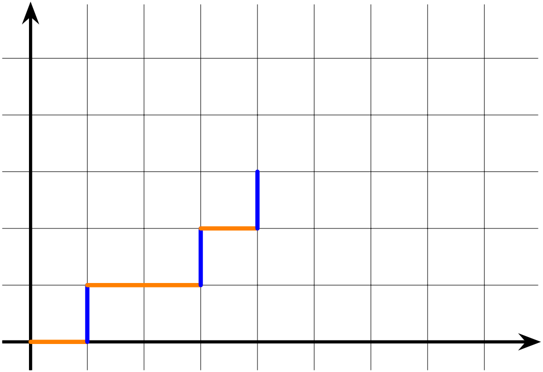
$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$$





Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 01001010010010100101 0\cdots$$

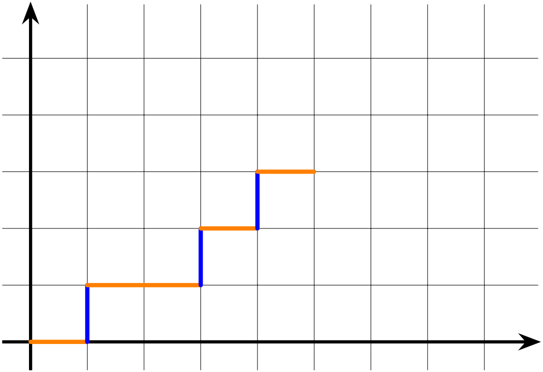


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$

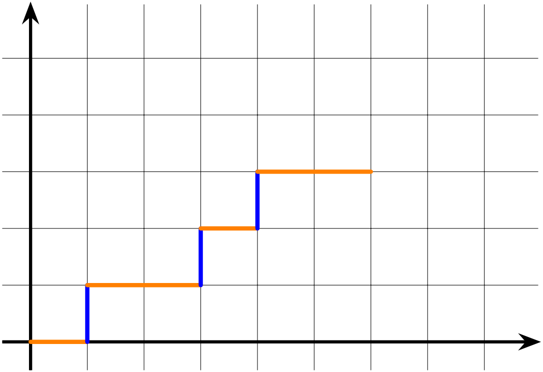


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 01001010010010100101 0\cdots$$

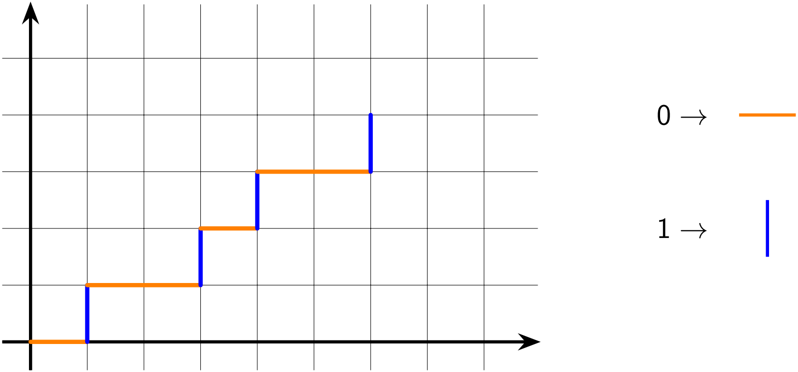


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

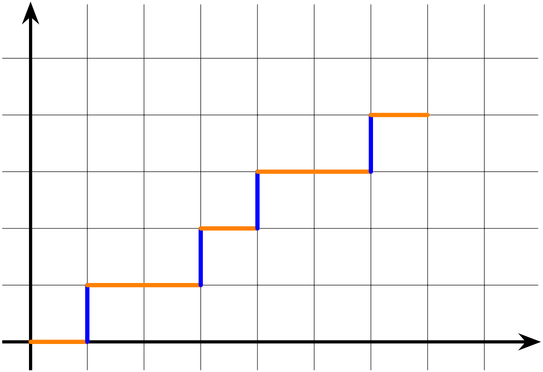
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$



Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$

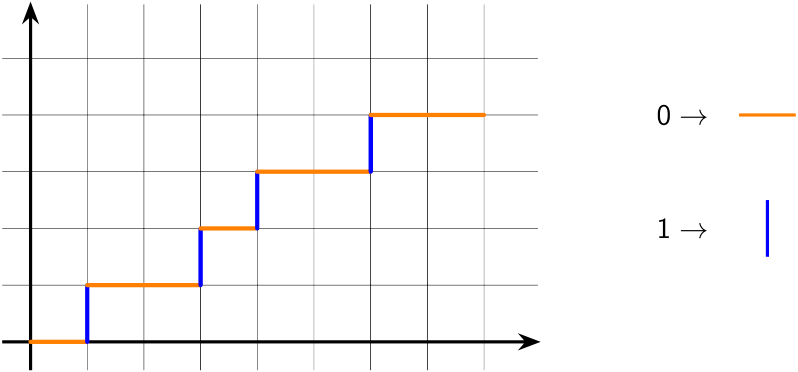


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

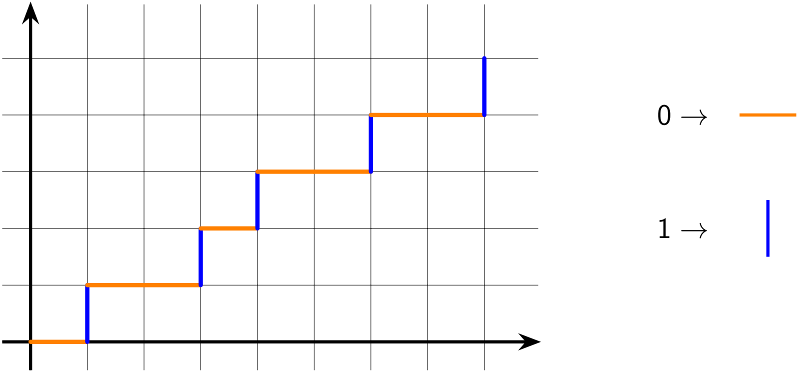
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$



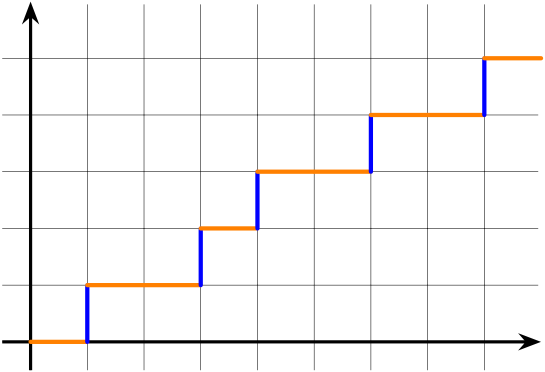
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$



Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 01001010010010100101 0\cdots$$

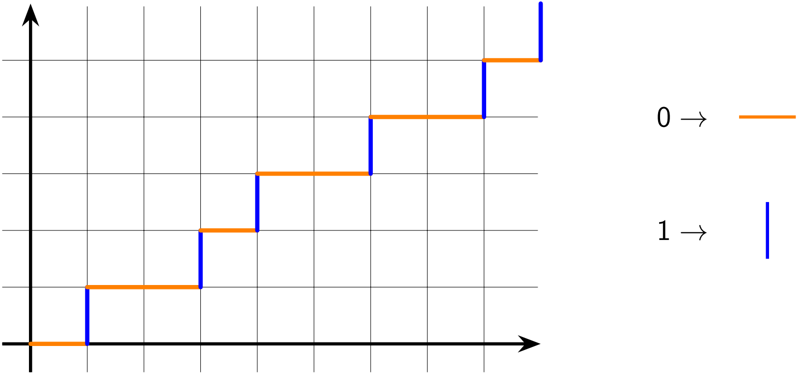


$0 \rightarrow$

$1 \rightarrow$

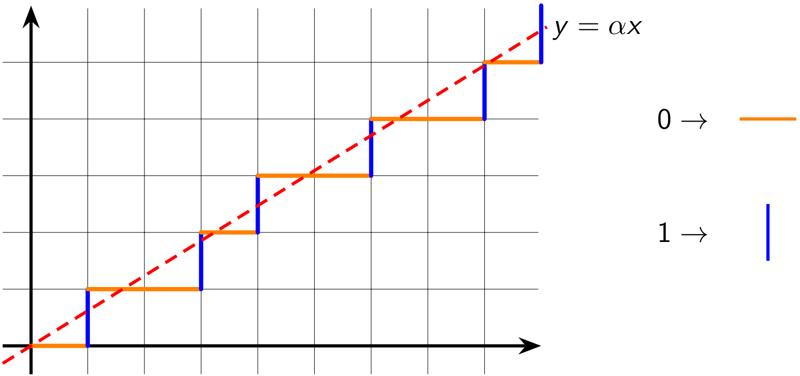
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$



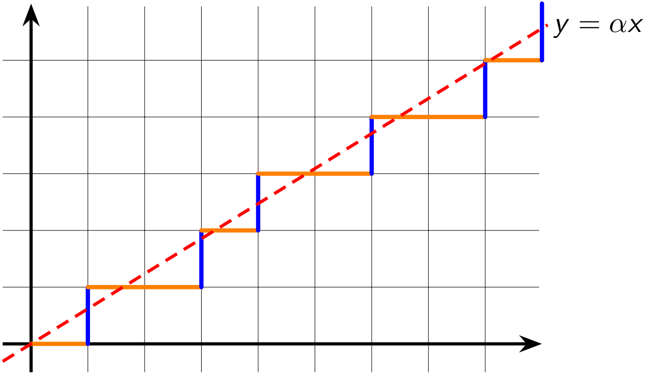
Visualisons (notre mot)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010 \cdots$$



Visualisons (notre mot)

$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$



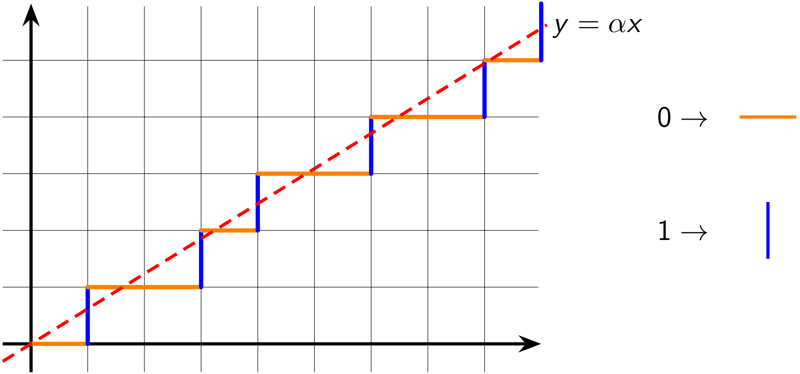
$0 \to$

$1 \to$

$\alpha \sim 0.618$

Visualisons (notre mot)

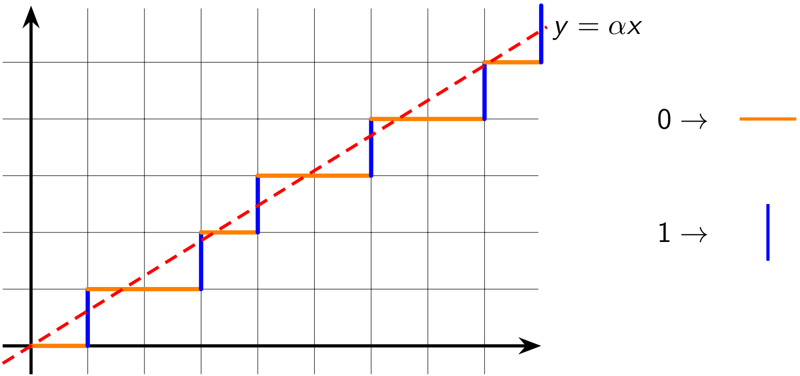
$\mathbf{f} = 01001010010100101001010 \cdots$



$\alpha \sim 0.618$ est lié au nombre d'or $\phi \sim 1.618$

Visualisons (notre mot)

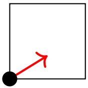
$\textcolor{orange}{\mathbf{f}} = 0100101001001010010 \cdots$



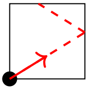
$\alpha \sim 0.618$ est lié au nombre d'or $\phi \sim 1.618$

L'alternance de 0 et de 1 donne une approximation d'une droite de pente $\phi - 1$

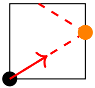
Jouons (au billard)



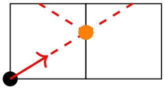
Jouons (au billard)



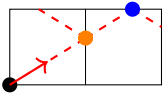
Jouons (au billard)



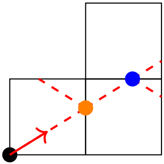
Jouons (au billard)



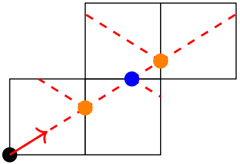
Jouons (au billard)



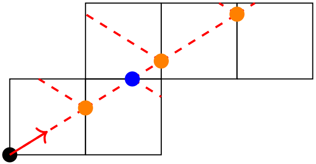
Jouons (au billard)



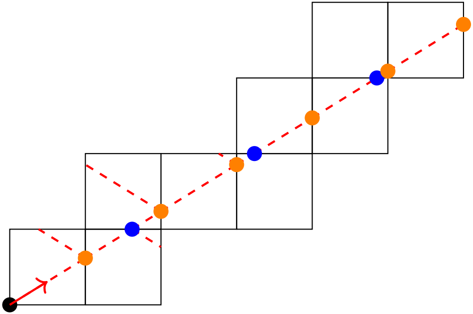
Jouons (au billard)



Jouons (au billard)

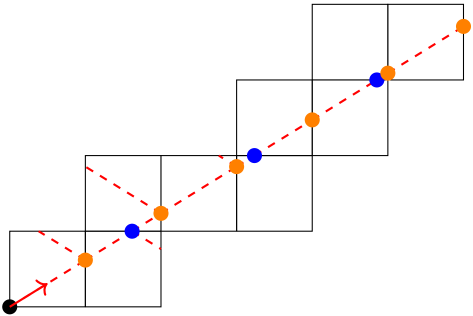


Jouons (au billard)



Jouons (au billard)

$$\mathbf{f} = 010010100100101001010\cdots$$

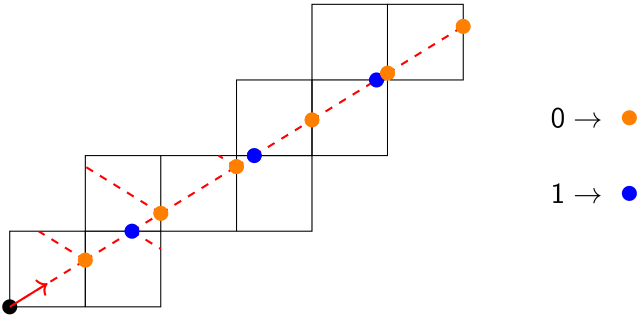


$0 \to$ ●

$1 \to$ ●

Jouons (au billard)

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100\cdots$$



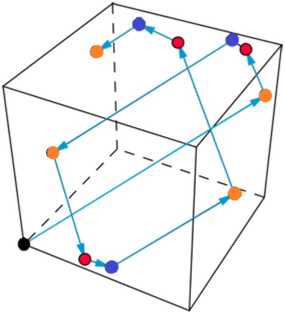
L'alternance de 0 et de 1 donne les parois frappées au billard

Étendons (nos recherches)

Et si on change

- la construction du début,
- la pente de la droite,
- la forme du billard,
- ...,

que peut-on dire sur le mot obtenu ?



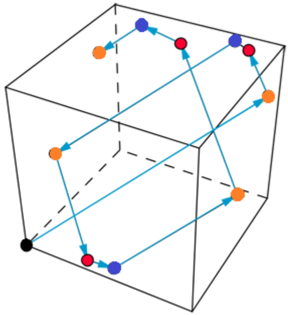
crédit : Wim Hordijk pour Plus

Étendons (nos recherches)

Et si on change

- la construction du début,
- la pente de la droite,
- la forme du billard,
- ...,

que peut-on dire sur le mot obtenu ?



crédit : Wim Hordijk pour Plus

Merci pour votre attention !