

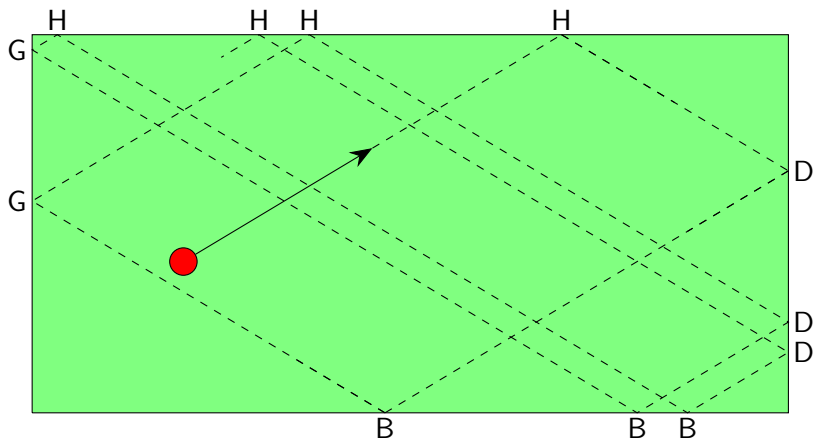
Combinatoire du billard

France Gheeraert

16 février 2026



Trajectoire au billard



$H \dots D \dots B \dots GHDBGHBDH \dots$

Première observation

HDBGHDBGHBDH...

Proposition

Si t_h est la sous-suite où on ne garde que les symboles B et H et t_v est la sous-suite où on ne garde que les symboles D et G, alors

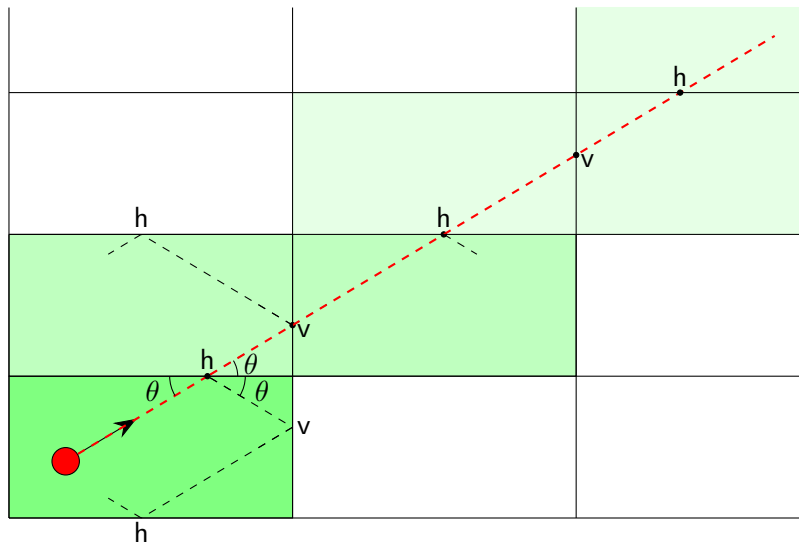
$$t_h = \begin{cases} HBHBHB \dots & \text{si l'angle est dans le 1}^{\text{er}} \text{ ou } 2^{\text{ème}} \text{ quadrant,} \\ BHBHBH \dots & \text{sinon ;} \end{cases}$$

$$t_v = \begin{cases} DGDGDG \dots & \text{si l'angle est dans le 1}^{\text{er}} \text{ ou } 4^{\text{ème}} \text{ quadrant,} \\ GDGDGD \dots & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$: on retient uniquement si la collision est horizontale ou verticale

hvhvhvhvhhvh...

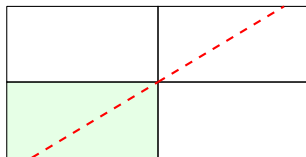
Deuxième observation



⇒ : on étudie les intersections entre une demi-droite et une grille

Cas des coins

Si la bille arrive dans un coin,



- on repart d'où on vient
- on considère qu'on fait d'abord une collision horizontale puis verticale

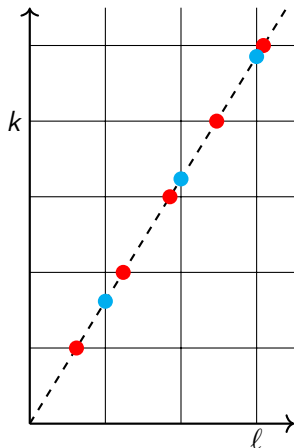
Simplifications

On considère la demi-droite $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$, x de signe donné.

On suppose

- l'angle dans le 1^{er} quadrant (symétries orthogonales)
 $\Rightarrow x > 0$ et $\alpha > 0$
- le billard de dimension 1×1 (changement d'échelle)
 - position initiale : (x_0, y_0) est remplacé par $\left(\frac{x_0}{\ell_h}, \frac{y_0}{\ell_v}\right)$
 - pente : α est remplacé par $\alpha \cdot \frac{\ell_v}{\ell_h}$ $\Rightarrow$ on regarde les intersections avec la grille orthonormée
($x \in \mathbb{N}^*$ ou $y \in \mathbb{N}^*$)
- $y_0 = \alpha x_0$
 $\Rightarrow$ demi-droite $y = \alpha x$

Ordre des collisions



$\ell^{\text{ème}}$ collision verticale :

$$x = \ell \implies y = \alpha \ell$$

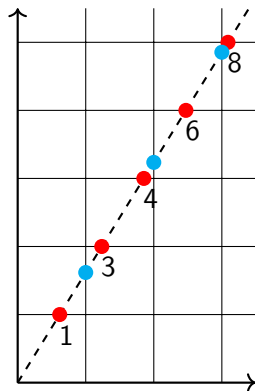
$$\implies \ell + \lfloor \alpha \ell \rfloor^{\text{ème}} \text{ collision}$$

$k^{\text{ème}}$ collision horizontale :

$$y = k \implies x = \frac{k}{\alpha}$$

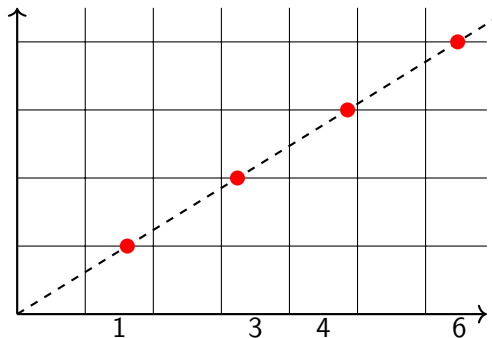
$$\implies k + \left\lceil \frac{k}{\alpha} \right\rceil - 1^{\text{ème}} \text{ collision}$$

Transformation



$$y = k \text{ et } x = \frac{k}{\alpha}$$

$$y = \alpha x$$



$$\rightsquigarrow y = k \text{ et } x = k + \frac{k}{\alpha}$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{\alpha}{1+\alpha} x = \beta x$$

Remarquons que $\beta \in]0, 1[$.

Ordre des collisions (2)

La $n^{\text{ème}}$ collision est horizontale

$\iff$ la droite $y = \beta x$ croise une droite $y = k$, $k \in \mathbb{N}^*$,
pour $x \in]n, n+1]$

$\iff \lfloor \beta(n+1) \rfloor > \beta n$

$\iff \lfloor \beta(n+1) \rfloor - \lfloor \beta n \rfloor = 1$

Proposition

Si une collision horizontale est représentée par 1 et une collision verticale par 0, la suite des collisions est donnée par $\mathbf{c}_\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^}$ où*

$$(\mathbf{c}_\alpha)_n = \lfloor \beta(n+1) \rfloor - \lfloor \beta n \rfloor.$$

Et maintenant ?

Étudier les collisions au billard revient à étudier des suites de 0 et de 1 obtenues par la formule

$$(\mathbf{c}_{\alpha,z})_n = \lfloor \beta(n+1) + z \rfloor - \lfloor \beta n + z \rfloor.$$

Exemple : $\mathbf{c}_\varphi = 1011010110110101101 \dots$

- Quelles sont les propriétés de ces suites ?
- A quel point sont-elles “compliquées” ?
- Peut-on déterminer si une suite de 0 et de 1 correspond à un billard ? Et pour quel α ?

Un peu de vocabulaire

L'étude de telles suites est le domaine de la combinatoire des mots.

- 0 et 1 sont des lettres,
- l'ensemble des lettres est un alphabet,
- les suites finies de lettres sont des mots,
- le langage d'une suite $\mathbf{x}$ est l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ des mots qui y apparaissent (de façon contigüe),
- $\mathcal{L}_n(\mathbf{x})$ est l'ensemble des mots de longueur n dans $\mathcal{L}(\mathbf{x})$.

Exemples :

- 001, 010100 et 1 sont des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$
- *abc*, *aaba* et *cc* sont des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$
- 010 et 10 sont dans $\mathcal{L}(0101010\cdots)$ mais 00 n'y est pas

Fréquences

Définition

La fréquence d'une lettre a dans une suite $\mathbf{x}$ est, **si ça existe**,

$$f_a(\mathbf{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \leq n : \mathbf{x}_i = a\}}{n}.$$

Dans $\mathbf{c}_\alpha$, la proportion de 1 parmi les n premières lettres est

$$\frac{\lfloor \beta(n+1) \rfloor}{n} \in \left[\frac{\beta(n+1) - 1}{n}, \frac{\beta(n+1)}{n} \right].$$

Donc

$$f_1(\mathbf{c}_\alpha) = \beta = \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad f_0(\mathbf{c}_\alpha) = 1 - f_1(\mathbf{c}_\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, les fréquences de 0 et 1 existent dans $\mathbf{c}_\alpha$ et valent respectivement $\frac{1}{1+\alpha}$ et $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Équilibre

Pour $w \in \mathcal{L}_n(\mathbf{c}_\alpha)$, il existe k tel que $w = (\mathbf{c}_\alpha)_{[k, k+n[}$.
Le nombre de 1 dans w est

$$\lfloor \beta(k+n) \rfloor - \lfloor \beta k \rfloor \in \{\lfloor \beta n \rfloor, \lfloor \beta n \rfloor + 1\}.$$

Définition

Une suite $\mathbf{x}$ sur $\{0, 1\}$ est équilibrée si, pour tous $w, v \in \mathcal{L}(\mathbf{x})$ de même longueur, le nombre de 1 dans w et dans v diffère d'au plus un.

Proposition

Pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, la suite $\mathbf{c}_\alpha$ est équilibrée.

Définition

Soit $\mathbf{x}$ une suite sur l'alphabet A . La complexité de $\mathbf{x}$ est la fonction

$$p_{\mathbf{x}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \#\mathcal{L}_n(\mathbf{x}).$$

Proposition

$$p_{\mathbf{x}}(n+1) - p_{\mathbf{x}}(n) = \sum_{w \in \mathcal{L}_n(\mathbf{x})} (\#E^D(w) - 1)$$

où $\#E^D(w)$ est l'ensemble des lettres a telles que $wa \in \mathcal{L}(\mathbf{x})$.

Équilibre et complexité

Proposition

Si une suite $\mathbf{x}$ sur $\{0, 1\}$ est équilibrée, alors $p_{\mathbf{x}}(n) \leq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (Morse-Hedlund, 1938)

Soit $\mathbf{x}$ une suite telle que $p_{\mathbf{x}}(n) \leq n + 1$ pour tout n . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p_{\mathbf{x}}(N) = p_{\mathbf{x}}(N + 1)$;*
- *il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p_{\mathbf{x}}(n) \leq N + 1$ pour tout $n \geq N$;*
- *$\mathbf{x}$ est ultimement périodique, i.e., il existe $K, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_k = x_{k+p}$ pour tout $k \geq K$.*

Corollaire

Toute suite équilibrée est soit ultimement périodique, soit telle que $p_{\mathbf{x}}(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- $\mathbf{c}_\alpha$ est ultimement périodique ;
- la trajectoire de la bille passe deux fois par le même point et avec la même direction ;
- α est rationnel ;
- $\mathbf{c}_\alpha$ est périodique.

Caractérisation des suites de collisions

On note $\mathbf{c}'_{\alpha,z}$ la suite obtenue comme $\mathbf{c}_{\alpha,z}$ mais avec la convention inverse pour les coins.

Proposition

Soit $\mathbf{x}$ une suite sur $\{0,1\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- il existe α irrationnel et z tels que $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{\alpha,z}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{c}'_{\alpha,z}$;*
- $\mathbf{x}$ est équilibrée et n'est pas ultimement périodique ;*
- $p_{\mathbf{x}}(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Une telle suite est appelée Sturmienne.

Proposition

Soit $\mathbf{x}$ une suite sur $\{0,1\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- il existe α rationnel et z tels que $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{\alpha,z}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{c}'_{\alpha,z}$;*
- $\mathbf{x}$ est équilibrée et périodique.*

Les suites Sturmiennes sont aussi

- engendrées par une construction basée sur les palindromes,
- engendrées par des opérations élémentaires,
- liées au développement en fractions continues,
- liées aux solutions d'équations différentielles particulières

On peut définir des suites similaires sur plus de lettres mais on ne peut pas garder toutes les propriétés à la fois.

- quasi-Sturmienne (très faible complexité) [Coven 1973]
- codages d'échanges d'intervalles (interprétation géométrique) [Veech 1978]
- épisturmienne (palindromes) [Arnoux-Rauzy 1991, Droubay-Justin-Pirillo 2001]
- neutre (faible complexité) [Cassaigne 1995]
- ultimement dendrique (regroupe toutes les précédentes) [Berthé *et al* 2015, Dolce-Perrin 2019]

- ❶ Dans un billard 2×1 , on tire une bille d'un coin avec un angle de 60° par rapport au côté de longueur 2. Déterminer les premières collisions et vérifier par dessin.
- ❷ Montrer que les fréquences n'existent pas pour la suite $01001^4 0^8 1^{16} \dots$.
- ❸ Donner un exemple de suite périodique non-équilibrée.
- ❹ Soit $\mathbf{x} = 010\,010\,010\,010\dots$.
 - Déterminer la complexité de $\mathbf{x}$.
 - Montrer que $\mathbf{x}$ est équilibrée.
 - Trouver α tel que $\mathbf{x} = \mathbf{c}_\alpha$.
- ❺ Démontrer le théorème de Morse-Hedlund.

- Comprendre les trajectoires périodiques dans un triangle équilatéral.
- Montrer l'existence d'une trajectoire périodique dans tout triangle acutangle.
- Montrer l'existence de trajectoires périodiques dans tout polygône régulier.